W tym tekście zobaczymy rozwiązanie zadania 41 z *Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015* oraz rozwiązania kilku zadań pokrewnych. W zadaniu 41 zobaczymy dwa sposoby rozwiązania. Pierwszy z nich ma właściwie znaczenie wyłącznie dydaktyczne, jako wprowadzenie do ważniejszego sposobu drugiego. Ten drugi sposób jest następnie wykorzystywany w kilku kolejnych zadaniach o wzrastającym stopniu trudności. Nauczyciel, który dokładnie omówi z uczniami oba sposoby rozwiązania zadania 41, może następnie pokazać podobne rozumowania w kilku zbliżonych sytuacjach. Końcowe zadania wymagają rozumowań, które wprawdzie mogą być pokazane na poziomie podstawowym, ale są szczególnymi przypadkami rozumowań ogólnych, wymagających wiadomości zawartych w podstawie programowej dla poziomu rozszerzonego. Wreszcie zadanie ostatnie wykorzystuje już w pełni tę wiedzę z poziomu rozszerzonego.

Zadanie 41. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Uwaga. Przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Podstawową techniką matematyczną stosowaną przy rozwiązywaniu podobnych zadań kombinatorycznych jest wykorzystanie dwóch zasad kombinatorycznych: reguły dodawania i reguły mnożenia. Popatrzmy na jedno możliwe sformułowanie tych reguł.

Reguła mnożenia. Przypuśćmy, że mamy do wykonania dwie czynności; wykonujemy je kolejno po sobie. Pierwsza czynność kończy się jednym z m możliwych wyników, druga kończy się jednym z n możliwych wyników. Wynikiem wykonania obu czynności po kolei jest oczywiście para (a, b), gdzie a jest jednym z możliwych wyników czynności pierwszej oraz b jest jednym z możliwych wyników czynności drugiej. Reguła mnożenia mówi, że istnieje mn możliwych wyników przy wykonywaniu obu czynności po kolei.

Reguła dodawania. Przypuśćmy, że możemy wykonać dwie czynności; tym razem jednak wykonujemy tylko jedną z nich. Dokładniej, wybieramy jedną czynność i ją wykonujemy. Pierwsza czynność kończy się jednym z m możliwych wyników, druga kończy się jednym z n możliwych wyników. W tym przypadku mamy dodatkowe założenie, że żaden wynik pierwszej czynności nie jest jednocześnie możliwym wynikiem drugiej czynności (mówimy też wtedy, że zbiory możliwych wyników obu czynności są rozłączne). Teraz wybieramy jedną czynność i ją wykonujemy. Reguła dodawania mówi, że istnieje wtedy $m + n$ możliwych wyników przy takim wykonywaniu jednej z dwóch czynności.

Reguły dodawania i mnożenia można uogólnić na większą liczbę czynności.

Reguła mnożenia. Przypuśćmy, że mamy do wykonania k czynności; wykonujemy je kolejno po sobie. Pierwsza czynność kończy się jednym z m_1 możliwych wyników, druga kończy się jednym z m_2 możliwych wyników, wreszcie k-ta czynność kończy się jednym z m_k możliwych wyników. Wynikiem wykonania tych k czynności po kolei jest oczywiście ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ długości k, gdzie dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ wyraz a_i jest jednym z możliwych wyników i-tej czynności. Reguła mnożenia mówi, że istnieje $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ możliwych wyników przy wykonywaniu wszystkich k czynności po kolei.

Reguła dodawania. Przypuśćmy, że możemy wykonać k czynności; tym razem jednak wykonujemy tylko jedną z nich. Dokładniej, wybieramy jedną czynność i ją wykonujemy.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
IBE entuzjaści edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Pierwsza czynność kończy się jednym z m_1 możliwych wyników, druga kończy się jednym z m_2 możliwych wyników, wreszcie k-ta czynność kończy się jednym z m_k możliwych wyników. W tym przypadku mamy dodatkowe założenie, że żaden wynik którejkolwiek czynności nie jest jednocześnie możliwym wynikiem innej czynności (mówimy też wtedy, że zbiory możliwych wyników wszystkich czynności są parami rozłączne). Teraz wybieramy jedną czynność i ją wykonujemy. Reguła dodawania mówi, że istnieje wtedy $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ możliwych wyników przy takim wykonywaniu jednej z k czynności.

Te reguły wykorzystujemy do rozwiązywania zadań na zliczanie, tzn. zadań, w których mamy odpowiedzieć na pytanie, ile jest pewnych obiektów matematycznych opisanych w zadaniu. Często stosujemy te reguły w następujący sposób. Zliczanie obiektów zastępujemy tworzeniem ich. Pytamy zatem o to, na ile sposobów możemy utworzyć obiekt opisany w zadaniu. Zobaczymy to w pierwszym sposobie rozwiązania naszego zadania.

Rozwiązanie. Sposób I. W tym rozwiązaniu skorzystamy z reguły dodawania i reguły mnożenia. Zastanowimy się, na ile sposobów możemy utworzyć liczbę czterocyfrową, w której występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste. Wyobrażamy sobie, że mamy cztery wolne miejsca i w każde z nich możemy wpisać jedną cyfrę. Chcemy zatem wpisać w te cztery miejsca jedną cyfrę nieparzystą i trzy cyfry parzyste. Zaczniemy od rozważenia czterech przypadków w zależności od tego, na którym miejscu znajduje się jedyna cyfra nieparzysta. Oznaczmy literą n cyfrę nieparzystą i literą p cyfrę parzystą. Mamy wówczas następujące cztery możliwości położenia cyfr parzystych i nieparzystych:

$$nppp, \quad pnpp, \quad ppnp \quad \text{oraz} \quad pppn.$$

W każdym z czterech przypadków skorzystamy z reguły mnożenia, by obliczyć, ile jest liczb rozważanej postaci oraz skorzystamy z reguły dodawania, by otrzymać ostateczną odpowiedź.

Zaczniemy zatem od określenia czterech czynności:

- czynność pierwsza polega na utworzeniu liczby postaci $nppp$,
- czynność pierwsza polega na utworzeniu liczby postaci $pnpp$,
- czynność pierwsza polega na utworzeniu liczby postaci $ppnp$,
- czynność pierwsza polega na utworzeniu liczby postaci $pppn$.

Obliczymy, iloma możliwymi wynikami kończy się każda z tych czterech czynności i następnie dodamy otrzymane liczby. Zauważmy, że spełniony jest warunek, że możliwe wyniki którejkolwiek czynności nie są jednocześnie wynikami innej. Mianowicie w każdej czynności otrzymujemy jako wynik liczbę innej postaci.

Przypadek 1. Cyfra nieparzysta stoi na pierwszym miejscu (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci $nppp$).

Definiujemy cztery czynności, które będziemy wykonywać po kolei:

- czynność pierwsza polega na wybraniu liczby stojącej na pierwszym miejscu,
- czynność druga polega na wybraniu liczby stojącej na drugim miejscu,
- czynność trzecia polega na wybraniu liczby stojącej na trzecim miejscu,
- czynność czwarta polega na wybraniu liczby stojącej na czwartym miejscu.

Czynność pierwsza kończy się jednym z 5 możliwych wyników, bowiem mamy 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej, która ma stać na pierwszym miejscu (są to możliwości: 1, 3, 5, 7 i 9). Każda z następnych czynności także kończy się jednym z 5 możliwych wyników, bowiem na każdym z następnych miejsc mamy 5 możliwości wyboru cyfry parzystej (są to możliwości: 0, 2, 4, 6 i 8). Zatem istnieje $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ liczb postaci *nppp*.

Uwaga. Przy stosowaniu reguły mnożenia często mamy do czynienia z następującą sytuacją. Wykonujemy kilkakrotnie po kolei w zasadzie tę samą czynność, w nieco tylko zmienionych okolicznościach, które jednak nie wpływają na liczbę możliwych wyników. Tak było w powyższym przypadku. Wpisanie cyfr w drugie, trzecie i czwarte miejsce polegało tak naprawdę na wykonaniu tej samej czynności (wyboru jednej cyfry parzystej) i różnica polegała tylko na tym, gdzie wybraną cyfrę wpiszemy. W takim przypadku, jeśli tę samą czynność kończącą się jednym z m możliwych wyników wykonujemy n razy, to ostatecznie otrzymamy jeden z m^n możliwych wyników. Często wykonanie n razy tej samej czynności zapisujemy jako jedną czynność, pamiętając o tym, że kończy się ona jednym z m^n możliwych wyników. Tak postąpimy w przypadkach drugim i czwartym.

Przypadek 2. Cyfra nieparzysta stoi na drugim miejscu (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *pnpp*).

Definiujemy trzy czynności, które będziemy wykonywać po kolei:

- czynność pierwsza polega na wybraniu liczby stojącej na pierwszym miejscu,
- czynność druga polega na wybraniu liczby stojącej na drugim miejscu,
- czynność trzecia polega na wybraniu kolejno dwóch liczb stojących na trzecim i czwartym miejscu.

Czynność pierwsza kończy się jednym z 4 możliwych wyników, gdyż mamy 4 możliwości wyboru cyfry parzystej, która ma stać na pierwszym miejscu (nie może to być zero, zatem pozostają 4 możliwości: 2, 4, 6 i 8). Czynność druga kończy się jednym z 5 możliwych wyników, gdyż mamy 5 możliwości wyboru liczby nieparzystej na drugim miejscu (są to: 1, 3, 5, 7 i 9). Czynność trzecia kończy się jednym z 5^2 możliwych wyników, gdyż na każdym z następnych dwóch miejsc mamy znów 5 możliwości wyboru cyfry parzystej (są to: 0, 2, 4, 6 i 8). Zatem istnieje $4 \cdot 5 \cdot 5^2 = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$ liczb postaci *pnpp*.

Przypadek 3. Cyfra nieparzysta stoi na trzecim miejscu (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *ppnp*).

Definiujemy cztery czynności, które będziemy wykonywać po kolei:

- czynność pierwsza polega na wybraniu liczby stojącej na pierwszym miejscu,
- czynność druga polega na wybraniu liczby stojącej na drugim miejscu,
- czynność trzecia polega na wybraniu liczby stojącej na trzecim miejscu,
- czynność czwarta polega na wybraniu liczby stojącej na czwartym miejscu.

Czynność pierwsza kończy się jednym z 4 możliwych wyników, gdyż mamy 4 możliwości wyboru cyfry parzystej, która ma stać na pierwszym miejscu (nie może to być zero, zatem pozostają 4 możliwości: 2, 4, 6 i 8). Czynność druga kończy się jednym z 5 możliwych wyników, gdyż mamy 5 możliwości wyboru liczby parzystej na drugim miejscu (są to: 0, 2, 4, 6 i 8). Czynność trzecia kończy się jednym z 5 możliwych wyników, gdyż mamy 5 możliwości wyboru liczby nieparzystej na trzecim miejscu (są to: 1, 3, 5, 7 i 9).

Wreszcie czynność czwarta kończy się także jednym z 5 możliwych wyników, gdyż mamy 5 możliwości wyboru cyfry parzystej na czwartym miejscu (są to: 0, 2, 4, 6 i 8). Zatem istnieje $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$ liczb postaci *ppnp*.

Przypadek 4. Cyfra nieparzysta stoi na czwartym miejscu (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *pppn*).

Definiujemy trzy czynności, które będziemy wykonywać po kolei:

- czynność pierwsza polega na wybraniu liczby stojącej na pierwszym miejscu,
- czynność druga polega na wybraniu dwóch liczb stojących na drugim miejscu i trzecim miejscu,
- czynność trzecia polega na wybraniu liczby stojącej na czwartym miejscu.

Czynność pierwsza kończy się jednym z 4 możliwych wyników, gdyż mamy 4 możliwości wyboru cyfry parzystej, która ma stać na pierwszym miejscu (nie może to być zero, zatem pozostają 4 możliwości: 2, 4, 6 i 8). Czynność druga kończy się jednym z 5^2 możliwych wyników, gdyż mamy po 5 możliwości wyboru liczby parzystej na drugim i trzecim miejscu (są to: 0, 2, 4, 6 i 8). Wreszcie czynność trzecia kończy się jednym z 5 możliwych wyników, gdyż mamy 5 możliwości wyboru liczby nieparzystej na czwartym miejscu (są to: 1, 3, 5, 7 i 9). Zatem istnieje $4 \cdot 5^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$ liczb postaci *pppn*.

Teraz powracamy do reguły dodawania, od której zaczęliśmy rozwiązanie. Zdefiniowaliśmy cztery czynności i wykonamy tylko jedną z nich:

- czynność pierwsza kończy się jednym z 625 wyników,
- czynność druga kończy się jednym z 500 wyników,
- czynność trzecia kończy się jednym z 500 wyników,
- czynność czwarta kończy się jednym z 500 wyników.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy wtedy $625 + 500 + 500 + 500 = 2125$ wyników, a więc istnieje 2125 liczb czterocyfrowych, w których występuje jedna cyfra nieparzysta i 3 cyfry parzyste.

Rozwiązanie. Sposób II. Ten sposób polega na zgrupowaniu razem trzech ostatnich przypadków z poprzedniego sposobu rozwiązania. Będziemy zatem mieli dwa przypadki do rozpatrzenia w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu. W przypadku pierwszym nie będziemy już wypisywać kolejnych czynności, bo nie różnią się one od czynności w rozwiązaniu sposobem pierwszym. Natomiast opiszemy dokładnie czynności w przypadku drugim, gdyż wystąpią tu nowe czynności, których nie było w pierwszym rozwiązaniu i które są bardzo często stosowane.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *nppp*).

Tak jak poprzednio, mamy 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej na pierwszym miejscu (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Następnie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry parzystej na każdym z pozostałych trzech miejsc (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $5 \cdot 5^3 = 5^4 = 625$ możliwych liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniami cyfr postaci *pnpp*, *ppnp* oraz *pppn*).

W tym przypadku korzystamy z reguły mnożenia w nieco inny sposób. Definiujemy cztery czynności, które będziemy wykonywać po kolei:

- czynność pierwsza polega na wybraniu liczby parzystej stojącej na pierwszym miejscu,
- czynność druga polega na wybraniu miejsca dla liczby nieparzystej,
- czynność trzecia polega na wybraniu liczby nieparzystej stojącej na miejscu wybranym w czynności drugiej,
- czynność czwarta polega na wybraniu dwóch liczb parzystych stojących na dwóch wolnych miejscach.

Czynność pierwsza kończy się jednym z 4 możliwych wyników, gdyż mamy 4 możliwości wyboru cyfry parzystej, która ma stać na pierwszym miejscu (nie może to być zero, zatem pozostają 4 możliwości: 2, 4, 6 i 8).
Czynność druga kończy się jednym z 3 możliwych wyników, gdyż mamy 3 możliwości wyboru miejsca dla cyfry nieparzystej (miejsce drugie, trzecie lub czwarte). Czynność trzecia kończy się jednym z 5 możliwych wyników, gdyż mamy 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej (są to: 1, 3, 5, 7 i 9). Wreszcie czynność czwarta kończy się jednym z 5^2 możliwych wyników, gdyż na każdym z dwóch wolnych miejsc możemy umieścić jedną z 5 cyfr parzystych (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 1500$ możliwych liczb.

Na zakończenie korzystamy z reguły dodawania i stwierdzamy, że mamy łącznie

$$625 + 1500 = 2125$$

liczb, o które chodziło w zadaniu.

Popatrzmy teraz na kilka podobnych zadań, w których wykorzystujemy analogiczne metody rozwiązania. Zaczniemy od zadania, którego rozwiązanie niewiele różni się od poprzedniego.

Zadanie 41a. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra parzysta i trzy cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie. Rozważymy dwa przypadki w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *pnnn*).

Mamy cztery możliwości wyboru cyfry parzystej na pierwszym miejscu (nie może tam być zera) i po pięć możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z pozostałych miejsc. Z reguły mnożenia wynika zatem, że w tym przypadku istnieje $4 \cdot 5^3 = 500$ liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *npnn*, *nnpn* lub *nnnp*).

Najpierw wybieramy miejsce, na którym ma stać cyfra parzysta. Mamy 3 możliwości (miejsce drugie, trzecie lub czwarte). Następnie wybieramy tę cyfrę parzystą; mamy 5 możliwości (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Wreszcie na każdym z trzech wolnych miejsc (wliczając w to miejsce pierwsze) mamy po 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $3 \cdot 5 \cdot 5^3 = 1875$ liczb.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy $500 + 1875 = 2375$ liczb.

Rozwiązanie kolejnego zadania różni się nieco od rozwiązań dwóch pierwszych zadań.

Zadanie 41b. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występują dwie cyfry parzyste i dwie cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie. Rozważymy dwa przypadki w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *ppnn*, *pnpn* lub *pnnp*).

Mamy cztery możliwości wyboru cyfry parzystej na pierwszym miejscu (nie może tam być zera). Następnie mamy trzy możliwości wyboru miejsca dla drugiej cyfry parzystej (miejsce drugie, trzecie lub czwarte) i pięć możliwości wyboru tej cyfry parzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Wreszcie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z pozostałych dwóch miejsc. Z reguły mnożenia wynika zatem, że w tym przypadku istnieje $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 1500$ liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta (czyli mamy do czynienia z rozmieszczeniem cyfr postaci *nnpp*, *npnp* lub *nppn*).

Najpierw wybieramy cyfrę nieparzystą na pierwsze miejsce; mamy 5 możliwości (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Następnie wybieramy miejsce, na którym ma stać druga cyfra nieparzysta (mamy 3 możliwości: miejsce drugie, trzecie lub czwarte) oraz tę cyfrę nieparzystą (mamy 5 możliwości: 1, 3, 5, 7 i 9). Wreszcie na każdym z dwóch wolnych miejsc mamy po 5 możliwości wyboru cyfry parzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 1875$ liczb.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy $1500 + 1875 = 3375$ liczb.

Pierwsze dwa zadania możemy uogólnić na liczby mające więcej cyfr.

Zadanie 41c. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych n-cyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i $n-1$ cyfr parzystych.

Rozwiązanie. Będziemy mieli dwa przypadki do rozpatrzenia w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta.

Mamy 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej na pierwszym miejscu (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Następnie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry parzystej na każdym z pozostałych $n-1$ miejsc (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$ możliwych liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta.

Najpierw wybieramy cyfrę parzystą na pierwsze miejsce. Mamy 4 możliwości (na pierwszym miejscu nie może stać zero, więc pozostają: 2, 4, 6 i 8). Następnie wybieramy miejsce, na którym stoi cyfra nieparzysta. Mamy tu $n-1$ możliwości (miejsce drugie, trzecie i tak dalej aż do ostatniego). Potem wybieramy tę cyfrę nieparzystą (mamy 5 możliwości: 1, 3, 5, 7 i 9). Wreszcie na każdym z $n-2$ wolnych miejsc możemy umieścić jedną z 5 cyfr parzystych (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $4 \cdot (n-1) \cdot 5 \cdot 5^{n-2} = (4n-1) \cdot 5^{n-1}$ możliwych liczb.

Wreszcie z reguły dodawania wynika, że mamy łącznie

$$5^n + (4n-1) \cdot 5^{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1} + (4n-4) \cdot 5^{n-1} = (4n+1) \cdot 5^{n-1}$$

liczb.

Zadanie 41d. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych n-cyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra parzysta i $n-1$ cyfr nieparzystych.

Rozwiązanie. Będziemy mieli dwa przypadki do rozpatrzenia w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta.

Mamy $n-1$ możliwości wyboru miejsca dla cyfry parzystej i 5 możliwości wyboru tej cyfry. Następnie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z pozostałych $n-1$ miejsc, wliczając w to miejsce pierwsze. Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $(n-1) \cdot 5 \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^n$ możliwych liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta.

Najpierw wybieramy cyfrę parzystą na pierwsze miejsce. Mamy 4 możliwości (na pierwszym miejscu nie może stać zero, więc pozostają: 2, 4, 6 i 8). Następnie na każdym z $n-1$ następnych miejsc możemy umieścić jedną z 5 cyfr parzystych (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $4 \cdot 5^{n-1}$ możliwych liczb.

Wreszcie z reguły dodawania wynika, że mamy łącznie

$$(n-1) \cdot 5^n + 4 \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1} = (5n-1) \cdot 5^{n-1}$$

liczb.

Rozwiązanie następnego zadania wymaga nowego pomysłu.

Zadanie 41e. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występują dwie cyfry parzyste i trzy cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie. Rozważamy dwa przypadki w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta.

Mamy cztery możliwości wyboru cyfry parzystej na pierwszym miejscu (nie może tam być zera). Następnie mamy cztery możliwości wyboru miejsca dla drugiej cyfry parzystej (miejsce drugie, trzecie lub czwarte) i pięć możliwości wyboru tej cyfry parzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Wreszcie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z pozostałych trzech miejsc. Z reguły mnożenia wynika zatem, że w tym przypadku istnieje $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5^3 = 10000$ liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta.

Najpierw wybieramy cyfrę nieparzystą na pierwsze miejsce; mamy 5 możliwości (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Następnie wybieramy dwa miejsca, na którym mają stać dwie pozostałe cyfry nieparzyste (mamy 6 możliwości dających następujące rozmieszczenia cyfr parzystych i nieparzystych: *nnnpp*, *nnpnp*, *nnppn*, *npnnp*, *npnpn*, *nppnn*). Potem mamy po 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z tych dwóch miejsc (mamy 5 możliwości: 1, 3, 5, 7 i 9). Wreszcie na każdym z dwóch wolnych miejsc mamy po 5 możliwości wyboru cyfry parzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $5 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 18750$ liczb.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy $10000 + 18750 = 28750$ liczb.

Zauważmy, że nowy pomysł polegał na zliczaniu sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr nieparzystych spośród 4 możliwych miejsc. Okazało się, że istnieje 6 możliwości wyboru. Podobny problem występuje w następującym zadaniu, którego rozwiązanie pominiemy, zostawiając je jako ćwiczenie. Zostanie podana wyłącznie odpowiedź.

Zadanie 41f. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występują trzy cyfry parzyste i dwie cyfry nieparzyste.

Odpowiedź. Istnieje 27500 takich liczb.

Spróbujmy uogólnić ostatnie dwa zadania. W tym celu spróbujmy obliczyć, na ile sposobów możemy wybrać dwa miejsca spośród k miejsc, którymi dysponujemy. Ponumerujmy dostępne miejsca liczbami od 1 do k. Nasze pytanie sprowadza się do pytania o to, na ile sposobów możemy wybrać dwie liczby spośród k liczb (nie uwzględniając kolejności wybierania).

Sposób I. Mniejsza z wybranych liczb nie może być równa k. Mamy zatem $k - 1$ możliwości wyboru mniejszej liczby. Popatrzmy teraz, na ile sposobów możemy wybrać większą liczbę w każdym z tych $k - 1$ przypadków:

- jeśli mniejszą z wybranych liczb jest 1, to mamy $k-1$ możliwości wybrania większej liczby (od 2 do k),
- jeśli mniejszą z wybranych liczb jest 2, to mamy $k-2$ możliwości wybrania większej liczby (od 3 do k),
- jeśli mniejszą z wybranych liczb jest 3, to mamy $k-3$ możliwości wybrania większej liczby (od 4 do k),
- jeśli mniejszą z wybranych liczb jest 4, to mamy $k-4$ możliwości wybrania większej liczby (od 4 do k),

  i tak dalej, aż do

- jeśli mniejszą z wybranych liczb jest $k-2$, to mamy 2 możliwości wybrania większej liczby ($k-1$ lub k),
- jeśli mniejszą z wybranych liczb jest $k-1$, to mamy tylko jedną możliwość wybrania większej liczby (mianowicie k).

Mamy zatem (możemy tu skorzystać na przykład ze wzoru na sumę $k-1$ wyrazów ciągu arytmetycznego)

$$(k-1)+(k-2)+\ldots+2+1=\frac{k(k-1)}{2}$$

możliwości wyboru dwóch liczb, a więc tyle możliwości wyboru dwóch miejsc.

Sposób II. Mamy k możliwości wyboru jednej liczby i $k-1$ możliwości wyboru drugiej. W ten sposób dostajemy $k(k-1)$ możliwości wyboru obu liczb, z tym tylko, że ten sposób zliczania uwzględnia kolejność wybierania. Ponieważ każdą parę liczb możemy wybrać w dwóch kolejnościach (na przykład liczby 3 i 5 możemy wybrać tak, że najpierw wybierzemy 3, a potem 5 lub najpierw 5, a potem 3), więc otrzymany wynik musimy podzielić przez 2. Ostatecznie otrzymujemy $\frac{k(k-1)}{2}$ sposobów wyboru.

Teraz możemy rozwiązać następne dwa zadania. W pierwszym zobaczymy pełne rozwiązanie, w drugim tylko odpowiedź.

Zadanie 41g. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych n-cyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występują dwie cyfry parzyste i $n-2$ cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie. Rozważamy dwa przypadki w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta.

Mamy cztery możliwości wyboru cyfry parzystej na pierwszym miejscu (nie może tam być zera). Następnie mamy $n-1$ możliwości wyboru miejsca dla drugiej cyfry parzystej (miejsce drugie, trzecie lub czwarte) i pięć możliwości wyboru tej cyfry parzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Wreszcie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z pozostałych $n-2$ miejsc. Z reguły mnożenia wynika zatem, że w tym przypadku istnieje $4\cdot(n-1)\cdot 5\cdot 5^{n-2}=4(n-1)\cdot 5^{n-1}$ liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta.

Najpierw wybieramy cyfrę nieparzystą na pierwsze miejsce; mamy 5 możliwości (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Następnie wybieramy dwa miejsca, na którym mają stać dwie pozostałe cyfry nieparzyste (z powyższego rozumowania wynika, że mamy $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ możliwości wyboru tych dwóch miejsc). Potem mamy po 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z tych dwóch miejsc (mamy 5 możliwości: 1, 3, 5, 7 i 9). Wreszcie na każdym z $n-3$ wolnych miejsc mamy po 5 możliwości wyboru cyfry parzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy

$$5\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 5^2\cdot 5^{n-3}=\frac{5(n-1)(n-2)}{2}\cdot 5^{n-1}$$

liczb.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy

$$4(n-1)\cdot 5^{n-1}+\frac{5(n-1)(n-2)}{2}\cdot 5^{n-1}=\frac{(n-1)(5n-2)}{2}\cdot 5^{n-1}$$

liczb.

Zadanie 41h. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych n-cyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występują $n-2$ cyfry parzyste i dwie cyfry nieparzyste.

Odpowiedź. Istnieje $(n-1)(2n+1)\cdot 5^{n-1}$ takich liczb.

Rozwiązania powyższych zadań nie wymagają wiadomości wykraczających poza podstawę programową dla poziomu podstawowego. Następne zadanie ogólne korzysta z pojęcia współczynnika dwumianowego, a więc pojęcia znajdującego się w podstawie programowej dla poziomu rozszerzonego.

Zadanie 41i. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych n-cyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje k cyfr parzystych i $n-k$ cyfr nieparzystych.

Rozwiązanie. Rozważamy dwa przypadki w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu.

Przypadek 1. Na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta.

Mamy cztery możliwości wyboru cyfry parzystej na pierwszym miejscu (nie może tam być zera). Następnie mamy $\binom{n-1}{k-1}$ możliwości wyboru miejsc dla pozostałych $k-1$ cyfr parzystych. Potem mamy po pięć możliwości wyboru każdej z tych $k-1$ cyfr parzystych (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Wreszcie mamy po pięć możliwości wyboru cyfry nieparzystej na każdym z pozostałych $n-k$ miejsc. Z reguły mnożenia wynika zatem, że w tym przypadku istnieje

$$4\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot 5^{k-1}\cdot 5^{n-k}=4\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot 5^{n-1}$$

liczb.

Przypadek 2. Na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta.

Najpierw wybieramy cyfrę nieparzystą na pierwsze miejsce; mamy 5 możliwości (są to cyfry: 1, 3, 5, 7 i 9). Następnie wybieramy k miejsc, na których mają stać cyfry parzyste; mamy $\binom{n-1}{k}$ możliwości wyboru tych miejsc. Potem mamy po 5 możliwości wyboru cyfry parzystej na każdym z tych k miejsc (mamy 5 możliwości: 1, 3, 5, 7 i 9). Wreszcie na każdym z $n-k-1$ wolnych miejsc mamy po 5 możliwości wyboru cyfry nieparzystej (są to cyfry: 0, 2, 4, 6 i 8). Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy

$$5\cdot\binom{n-1}{k}\cdot 5^{k}\cdot 5^{n-k-1}=5\cdot\binom{n-1}{k}\cdot 5^{n-1}$$

liczb.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy

$$\left(4\cdot\binom{n-1}{k-1}+5\cdot\binom{n-1}{k}\right)\cdot 5^{n-1}$$

liczb.